Métodos Formais

Relações e Funções

por Mauro Silva

Agenda

- Relações Binárias
- Relações e Banco de Dados
- Operações nas Relações
- Resumo Relações
- Funções

© Mauro Silva

Relações Binárias

- Definição
  - Relação entre pares de elementos pertencentes a um conjunto.
- Tipos
  - Ordem Parcial: elementos relacionados por uma ordem parcial podem ser representados graficamente.
  - Equivalência: elementos relacionados por uma relação de equivalência podem ser agrupados em classes.

© Mauro Silva

Relações Binárias

- Aplicação
  - Uma generalização de uma relação binária forma a base para um banco de dados relacional.
  - Usando as operações de restrição, projeção e união nas relações de um banco de dados, podemos fazer diversas consultas ao banco.
- Função é um tipo particular de relação binária.
- Funções assim como relações, descrevem diversas situações reais.

© Mauro Silva

Relações Binárias

Se descobrirmos que duas pessoas, Henriqueta e Horácio, estão **relacionadas**, entenderemos que existe alguma **conexão** familiar entre elas – que o par (Henriqueta, Horácio) se diferencia de outros pares ordenados de pessoas porque existe uma **relação** (são primos, irmãos, etc.) que Henriqueta e Horácio **satisfazem**.

O análogo matemático é distinguir determinados pares ordenados de objetos de outros pares ordenados porque as componentes dos pares satisfazem alguma relação que os outros não satisfazem.

© Mauro Silva

Relações Binárias

- O produto cartesiano de S com ele mesmo, $S \times S$ ou S^2, é o conjuntos de todos os pares ordenados de elementos de S. Seja $S=\{1,2,3\}$: então,
  - $S \times S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
- Interessados na relação de igualdade, então $(1,1),(2,2)$ e $(3,3)$ seriam os elementos de $S \times S$ que escolheríamos, *ie*, os únicos pares ordenados cujas componentes são iguais.
- Interessados na relação de um número ser menor do que o outro
  - $(1,2),(1,3)$ e $(2,3)$ em $S \times S$.

© Mauro Silva

Relações Binárias

- Escolher os pares ordenados (x,y) dizendo que
  - $x = y$ ou $x < y$.
- A notação $x \rho y$ indica que o par ordenado (x,y) satisfaz a relação ρ.
- A relação ρ pode ser definida por palavras ou, simplesmente, listando-se os pares ordenados que o satisfazem.

© Mauro Silva

Relações Binárias

- Seja $S = \{1,2,4\}$.
- No conjunto $S \times S = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}$, pode-se definir uma relação por
  - $x \rho y$ se, e somente se, $x = y/2$,

  abreviada como $x \rho y \leftrightarrow x = y/2$.
- Portanto, (1,2) e (2,4) satisfazem ρ.
- Ou, $\{(1,2),(2,4)\}$ é o conjunto de pares ordenados que satisfazem ρ.

© Mauro Silva

Relações Binárias

Definição: Relação Binária em um Conjunto S Dado um conjunto S, uma **relação binária em S** é um subconjunto de S x S (um conjunto de todos os pares ordenados de elementos de S).

Uma relação binária ρ é um subconjunto, vemos que

$$\mathbf{x\ \rho\ y \leftrightarrow (x,y) \in \rho}$$

Obs.1: uma relação binária é definida por uma descrição.

Obs.2: a descrição é um predicado binário que é satisfeito por determinados pares ordenados.

© Mauro Silva

Relações Binárias

- Seja $S = \{1,2\}$.
  - Então $S \times S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
  - Seja ρ a relação em S dada pela descrição
    - $x\ \rho\ y \leftrightarrow x + y$ *é ímpar*,
    - Então $(1,2) \in \rho$ e $(2,1) \in \rho$.
- Seja {1,2}.
  - Então $S \times S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
  - Se ρ é definida em S por $\rho = \{(1,2),(2,1)\}$, então
  - $1\ \rho\ 1$ e $2\ \rho\ 1$ são verdadeiras.

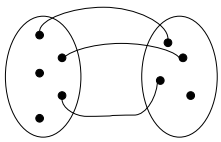
© Mauro Silva

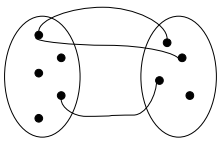
Relações Binárias

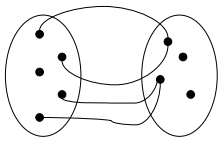
- Exercício
  - Para cada uma das relações binárias ρ definidas a seguir em $\mathbb{N}$, decida quais entre os pares ordenados pertencem a ρ.
  - A. $x \rho y \leftrightarrow x = y + 1$; (2,2),(2,3),(3,3),(3,2)
  - B. $x \rho y \leftrightarrow x$ *divide* y; (2,4),(2,5),(2,6)
  - C. $x \rho y \leftrightarrow x$ *é ímpar*; (2,3),(3,4),(4,5),(5,6)
  - D. $x \rho y \leftrightarrow x > y^2$; (1,2),(2,1),(5,2),(6,4),(4,3)

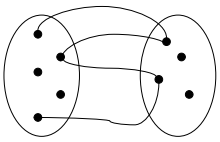
© Mauro Silva

Relações Binárias


Um para um


Um para muitos


muitos para um


muitos para muitos

© Mauro Silva

Relações & Banco de Dados

- Modelo Relacional
  - As relações são descritas por tabelas.
  - Um **banco de dados relacional [[ ]]** consiste em uma coleção de tais tabelas.
  - Uma tabela entidade leva o nome de entidade.
  - Cada linha da tabela contém os valores dos *n* atributos de um elemento particular daquele conjunto entidade.
  - Pode-se considerar a tabela relacional como um conjunto de *n*-uplas (as linhas) e uma linha individual é chamada de **tupla**.
  - Segundo a idéia de conjunto não existem tuplas duplicadas e não se tem nenhuma ordem entre as tuplas.
  - O número de atributos (colunas) é chamado de **grau** da relação.
  - O número de tuplas (linhas) é chamado de **cardinalidade** da relação.

© Mauro Silva

Relações & Banco de Dados

- Modelos
  - Conceitual
    - Tentativa de se capturar as característica importantes e o funcionamento de um empreendimento.
  - Entidade relação (E R)
    - Representação de alto nível onde são identificados objetos importantes junto com seus atributos ou propriedades relevantes.
  - Relacional
    - Desenvolvida a partir de um modelo E-R.
    - Tanto as entidades quanto as relações do modelo E-R tornam-se relações (no sentido matemático) no modelo relacional.

© Mauro Silva

Operações nas Relações

- Duas operações unárias podem ser executadas em relações são as operações de
  - Restrição.
  - Projeção.
- Restrição
  - Cria uma nova relação formada pelas tuplas da relação original que satisfazem uma determinada propriedade.
- Projeção
  - Cria uma nova relação formada por determinados atributos da relação original, eliminando as duplicatas.
- As operações de Restrição e Projeção podem ser consideradas em termos de subconjuntos.

© Mauro Silva

Operações nas Relações

- <u>Restrição</u>: cria um subconjunto de linhas que satisfazem uma determinada propriedade.
- <u>Projeção</u>: cria um subconjunto de colunas que representam determinados atributos.

A operação
Restrição de Animal-Proprietário **onde** Tipo-de-animal = "Cachorro"
fornecendo Cachorro-Proprietário

A operação
Projeção de Animal-Proprietário **sobre**(Nome,Tipo-de-animal)
fornecendo Preferência

© Mauro Silva

Operações nas Relações

- Junção: executada em duas relações com um atributo em comum (coluna).

A operação
Junção de Pessoa **e** Animal-Proprietário **sobre** *Nome* **fornecendo** Listagem

© Mauro Silva

Operações nas Relações

- Álgebra Relacional: é uma linguagem teórica em bando de dados relacionais na qual as operações de restrição, projeção e junção podem ser combinadas.

projeção (**junção** (**restrição** Animal-Proprietário **onde** *Tipo-de-animal* = "Gato") **e** (restrição Pessoa **onde** *Estado* = "RJ") **sobre** *Nome*) **sobre** *Nome-do-animal* **fornecendo** Resultado_Final

© Mauro Silva

Operações nas Relações

- SQL: é uma linguagem padrão internacional de bando de dados relacional.

1. **SELECT** *Nome-do-animal*
2. **FROM** Animal-Proprietário, Pessoa
3. **WHERE** *Animal-Proprietário.Nome = Pessoa.Nome*
4. **AND** *Tipo-de-animal* = "Gato"
5. **AND** *Estado* = "RJ"

Linhas 4 e 5 ?_____
Linha 3 ?_____
Linha 1 ?_____
Linha 2 ?_____

© Mauro Silva

Operações nas Relações

- Cálculo Relacional: descrição teórica em termos de conjuntos.

Conjunto dos valores de *x* é Animal-Proprietário
Conjunto dos valores de *y* é Pessoa
{*x.Nome-do-animal* | *x.Tipo-de-animal* = "Gato" **e**
existe *y* (*y.Nome* = *x.Nome* **e** *y.Estado* = "RJ") }

© Mauro Silva

Resumo Relações

- Técnicas:
  - Execução das operações de restrição, projeção e junção em um bando de dados relacional.
  - Formulação de pesquisas em um banco de dados relacional usando álgebra relacional, SQL e cálculo relacional.
- Idéias Principais:
  - Um banco de dados relacional usa relações matemáticas, descritas por tabelas, para modelar objetos e relações em um empreendimento.

© Mauro Silva

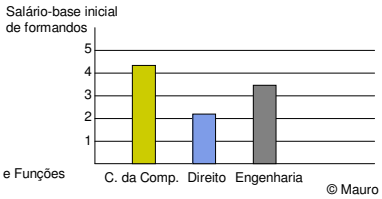
Resumo Relações

- Idéias Principais:
  - As operações de restrição, projeção e junção em um bando de dados são operações em relações (conjunto de tuplas).
  - Podem ser formuladas pesquisas em um bando de dados relacional usando-se as operações de restrição, projeção e junção, comandos SQL ou notações de teoria dos conjuntos e da lógica de predicados.

© Mauro Silva

Funções

- Casos particulares de relações binárias de um conjunto *S* em um conjunto *T*.
- Bastante comum mesmo em contextos não-técnicos.
  - "O aumento do salário base inicial depende da carreira"
  - "O aumento do salário base inicial é uma função da carreira"



© Mauro Silva

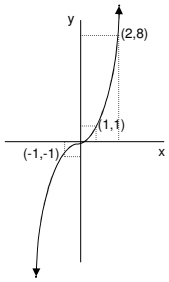
Funções

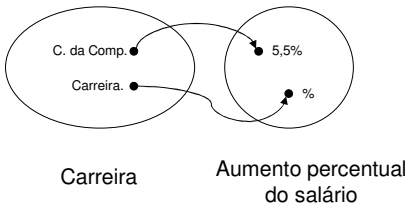
- Funções também são usadas em álgebra e cálculo.
- $g(x) = x^3$ expressa uma relação funcional entre os valores de *x* e *y* e os valores correspondentes que resultam quando o *x* é substituído por seu valor na expressão.
  - $g(1) = 1^3 = 1$, $g(-1) = (-1)^3 = -1$, *etc.*
- Para cada valor de x, o valor correspondente para g(x) é único.

© Mauro Silva

Funções

- O gráfico dessa função em um sistema retangular de coordenadas, os pontos (2,8), (1,1) e (-1,-1) seriam pontos pertencentes ao gráfico.





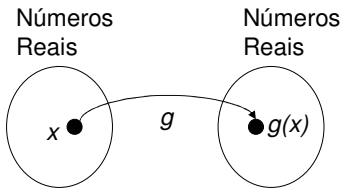
© Mauro Silva

Funções

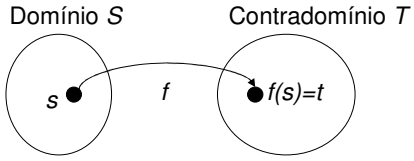
- Para o exemplo algébrico $g(x)=x^3$ a função sempre começa com um número real e tem um outro real associado.
- A associação é descrita por
  - $\{ (x,g(x)) \mid g(x)=x^3 \}$
- Partes da Função
  - (1) um conjunto de valores iniciais: domínio da função.
  - (2) um conjunto de valores associados: imagem da função.
  - (3) a associação propriamente dita.

© Mauro Silva

Funções



$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f : S \rightarrow T$

© Mauro Silva

Funções

- $f : S \rightarrow T$
  - A associação é um conjunto de pares ordenados da forma *(s,t)*, onde $s \in S$, $t \in T$ e *t* é o valor de *T* que a função associa ao valor de *s* em *S*; $t = f(s)$.
  - A associação é um subconjunto de *S x T*.
- Propriedade importante:
  - Todo elemento de *S* tem que ter um, e um único, valor em *T* associado, de modo que todo $s \in S$ aparece exatamente uma vez como a primeira componente de um par *(s,t)*.

© Mauro Silva

Funções

Definição: Terminologia para Funções Sejam S e T conjuntos. Uma **função** (**aplicação**) f de S em T, $f : S \rightarrow T$, é um subconjunto de $S \times T$ tal que cada elemento de S aparece exatamente uma vez como a primeira componente de um par ordenado.

S é o **domínio** e T é o **contradomínio** da função. Se (s,t) pertence à função, então denotamos t por $f(s)$;

t é a **imagem** de s sob f,
s é uma **imagem inversa** de t sob f e
f leva s em t.

Para $A \subseteq S$, $f(A)$ denota $\{ f(a) \mid a \in A \}$.

© Mauro Silva

Funções

- *Questão (???)*
  - Uma relação do tipo um para muitos (ou muitos para muitos) pode ser uma função?

© Mauro Silva

Funções

- Exercícios: quais das relações abaixo são funções do domínio no contradomínio indicado? Para as que não são, por que não?
  - *A.* $f : S \rightarrow T$, onde $S = T = \{1,2,3\}$,
    - $f = \{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1)\}$.
  - *B.* $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, onde g é definida por $g(x) = |x|$ (módulo de x).
  - *C.* $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde h é definida por $h(x) = x - 4$.

© Mauro Silva

Métodos Formais

Relações e Funções

por Mauro Silva