# Métodos Formais

Redes de Petri

*por* Mauro Silva

## Agenda

- Introdução
- Definição
- Rede de Petri (RdP) Marcada
- Regras de Execução
- Matriz de Incidência
- Grafo das Marcações Acessíveis
- Redes Básicas
- Fluxo de Controle


© Mauro Silva

# Introdução

- Família de técnicas de descrição formal
- Inicialmente proposta por Carl A. Petri, na Universidade de Darmstadt, 1962 -Alemanha
  - *Kommunikation mit Automaten*



# Introdução

- Áreas de Aplicação:
  - Concorrência
  - Arquitetura de Computadores
  - Protocolo de Redes
  - Sistemas Operacionais
  - Sistemas de Produção
  - Sistemas Digitais
  - *Hardware/Software Co-design*
  - Engenharia de Software
  - Sistemas de Tempo Real
  - Modelagem e Avaliação de Desempenho
  - Diagnóstico de Falhas
  - Controle de Tráfego
  - *Workflow*
  - Administração
  - Química
  - etc

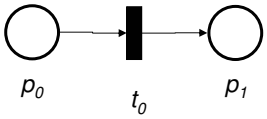
# Introdução

Componentes

Lupar
(*Place*)

Transição
(*Transition*)

Rede

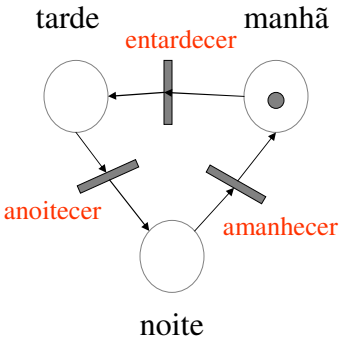


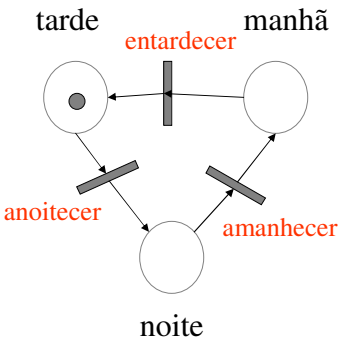


© Mauro Silva

# Introdução

- Períodos do dia





© Mauro Silva

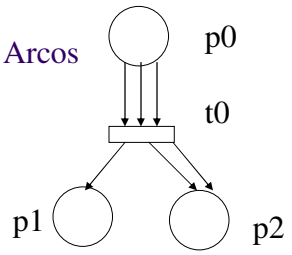
# Introdução

Componentes

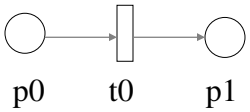
Lugar

Transição

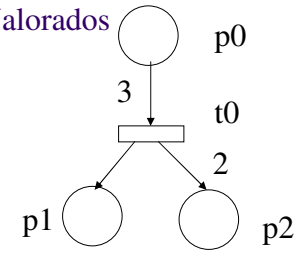
Múltiplos Arcos




Rede




Arcos Valorados

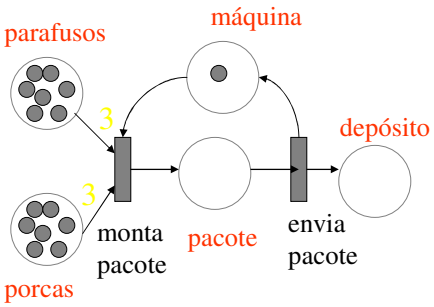




© Mauro Silva

# Introdução

- Linha de Produção (estado inicial)

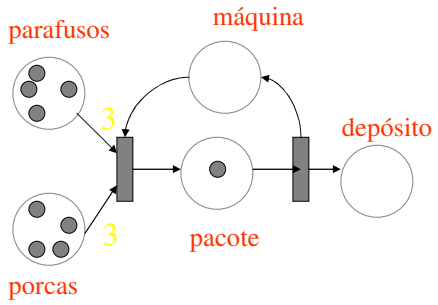




© Mauro Silva

# Introdução

- Linha de Produção (após primeiro “disparo”)

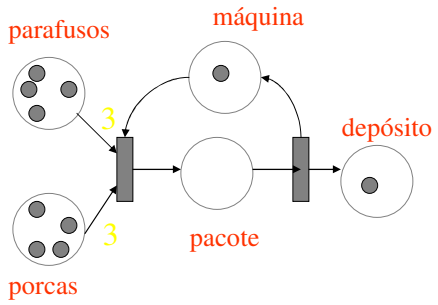




© Mauro Silva

# Introdução

- Linha de Produção (após segundo “disparo”)





© Mauro Silva

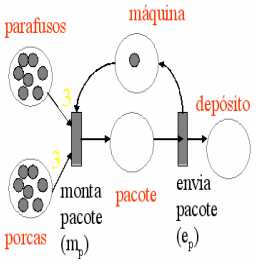
# Definição

- Definição: *Place/Transition Nets* - Teoria Matricial
  - N=(P,T,I,O,K)
  - P - Conjunto de Lugares - $P=\{p_0, ..., p_n\}$
  - T - Conjunto de transições - $T=\{t_0, ..., t_m\}$
  - I - Matriz de entrada - $I: T \times P \rightarrow \mathbb{N}$
  - O - Matriz de saída - $O: T \times P \rightarrow \mathbb{N}$
  - K – vetor das capacidades $K:P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\propto\}$


© Mauro Silva

# Definição *(Aplicação)*

- $R_{LP}$=(P,T,I,O,K)
  - P = {parafusos, porcas, maquina, pacote, depósito}
  - T = {monta_pacote, envia_pacote}
  - K= | 7, 7. 0, 1, 0 |




$$I = \begin{array}{cc} m_p & e_p \\ \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad O = \begin{array}{cc} m_p & e_p \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{parafuso} \\ \text{porcas} \\ \text{máquina} \\ \text{depósito} \\ \text{pacote} \end{array}$$


© Mauro Silva

## RdP Marcada

- Rede de Petri Marcada
  - Uma marca (ficha ou *token*) é um conceito primitivo em redes de Petri.
  - Os *tokens* são informações atribuídas aos lugares.
  - O número e a distribuição de marcas nos lugares correspondem à marcação (estado) da rede em um determinado momento.
  - Em geral a presença do *token* em um lugar pode ser interpretada como a presença de um recurso de um determinado tipo.

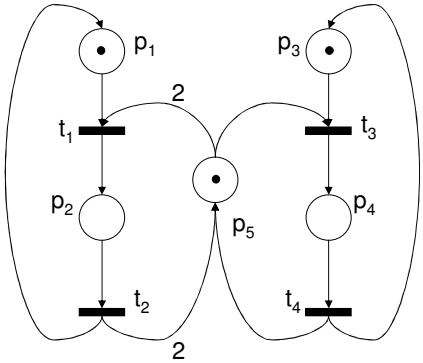

© Mauro Silva

## RdP Marcada

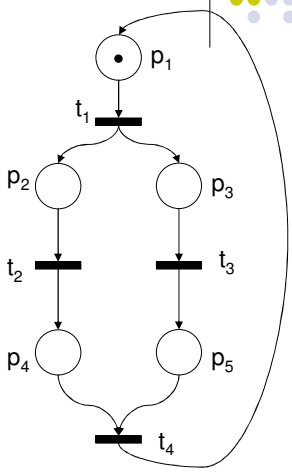
- Marcação
  - **Definição**: seja $P$ o conjunto de lugares de uma rede de Petri. Define-se formalmente marcação como uma função que mapeia o conjunto de lugares $P$ a inteiros não negativos $M: P \rightarrow \mathbb{N}$
  - **Definição (Vetor marcação)**: seja P um conjunto de lugares de uma rede R. A marcação pode ser definida como um vetor $M = (M(p_1), ...,M(p_n))$, onde $n = \#P$, para todo $p_i \in P$ tal que $M(p_i) \in \mathbb{N}$.


© Mauro Silva

# RdP Marcada




$R_1$




$R_2$


© Mauro Silva

# RdP Marcada

- Redes Marcadas $R_1$ e $R_2$

$$M_0^{R1} = \begin{array}{|c|c} 1 & p_1 \\ 0 & p_2 \\ 1 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ 1 & p_5 \end{array} \qquad M_0^{R2} = \begin{array}{|c|c} 1 & p_1 \\ 0 & p_2 \\ 0 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ 0 & p_5 \end{array}$$


© Mauro Silva

## RdP Marcada

- Uma rede de Petri pode ser definida por uma dupla formada pela estrutura da rede (*R*) e uma marcação inicial ($M_0$) associada à rede.
- Rede Marcada
  - **Definição**: define-se uma rede de Petri marcada pela dupla *RM = (R; M0)*, onde *R* é a estrutura da rede e $M_0$ a marcação inicial.


© Mauro Silva

## RdP Marcada

- O comportamento dos sistemas pode ser descrito em função dos seus estados e suas alterações.
- Para simular o comportamento dinâmico dos sistemas a marcação da rede de Petri é modificada, a cada ação realizada (***transição disparada***), segundo algumas **regras de execução**.

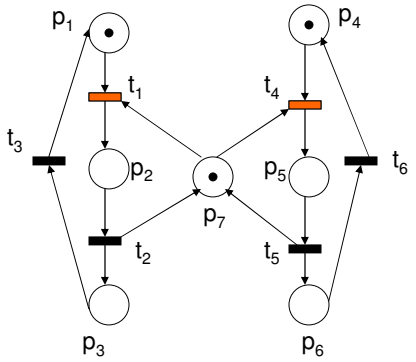

© Mauro Silva

# Regras de Execução

- O disparo das transições (execução das ações) é controlado pelo número e distribuição de marcas nos lugares.


© Mauro Silva

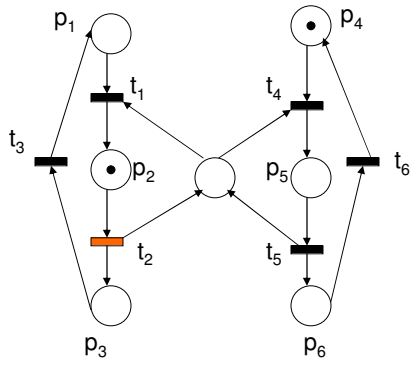
# Regras de Execução





© Mauro Silva

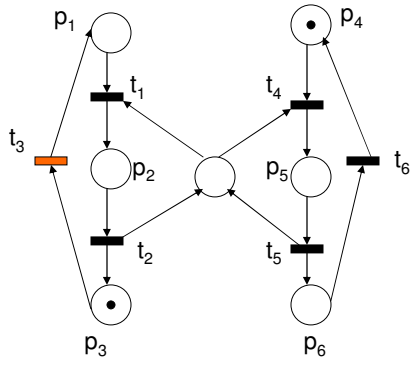
# Regras de Execução





© Mauro Silva

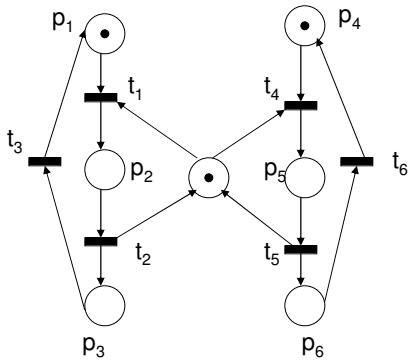
# Regras de Execução





© Mauro Silva

# Regras de Execução





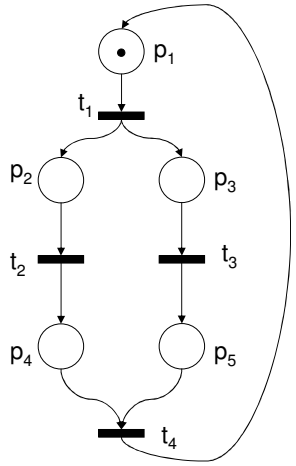
© Mauro Silva

# Regras de Execução

- Uma transição *t* está habilitada se, e somente se, todos os lugares de entrada ($p_i \in P$) de *t* tem marcação $M(p_i) \geq I(p_i, t)$.
- Denota-se a habilitação de uma transição *t* para uma marcação *M'* por *M' [ t >.*
- Vale ressaltar:
  - A marcação habilita o disparo de uma transição, contudo não obriga o seu disparo (não-determinismo).
- Denota-se a acessibilidade da marcação *M''* a partir de *M'* pelo disparo da transição *t* por *M' [ t > M''.*


© Mauro Silva

# Regras de Execução

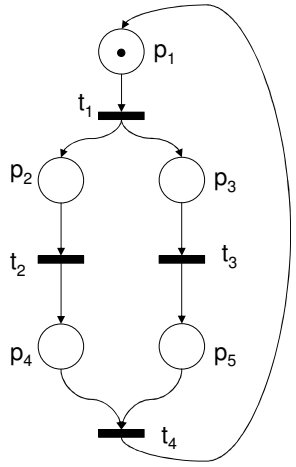



$R_2$

- Regra de habilitação
  - $M[t_j>$,
  - $M(p_i) \geq I(p_i,t)$, $\forall p_i \in P$
- Regra de disparo
  - Se $M[t_j>M'$, então
  - $M'(p)=M_0(p)-I(p,t_j)+O(p,t_j)$,
    - $\forall p \in P$


© Mauro Silva

# Regras de Execução




$R_2$

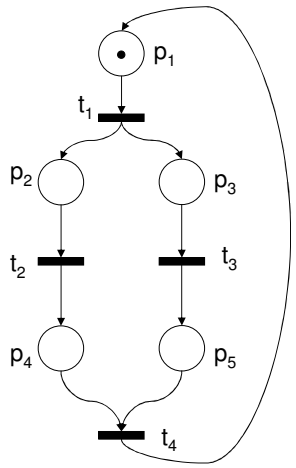
$$\mathbf{M'(p) = M_0(p) - I(p,t_j) + O(p,t_j)}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix}$$

$$M_0^{R2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix}$$


© Mauro Silva

# Regras de Execução




$R_2$

- O disparo da transição $t_1$ altera a marcação, retirando um *token* do lugar $p_1$ e armazenando um *token* no lugar $p_2$ e $p_3$

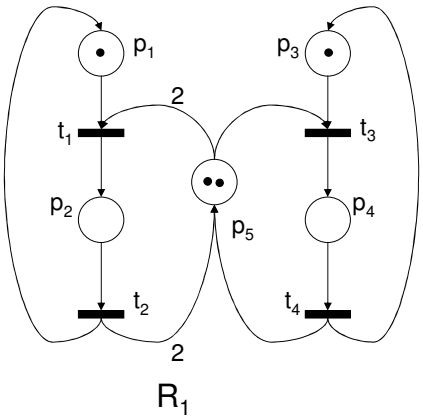

© Mauro Silva

# Regras de Execução

- **Transição Disparável**
  - Definição: uma transição t é disparável para uma marcação M (M[t>) se, e somente se, $M(p) \geq I(p,t)$ para todo $p_i \in P$. Se t é disparável para uma marcação $M_0$, então como o disparo de t é obtida uma nova marcação M' ($M_0$[t>M'), tal que:
    - $M'(p) = M_0(p) - I(p,t) + O(p,t)$, *para todo* $p \in P$.


© Mauro Silva

# Regras de Execução




- Marcações Acessíveis da rede $R_1$, através dos disparos das transições $t_1$ e $t_3$.
- $M_0$=(1,0,1,0,2)
- Disparando $t_1$.
  - $M_1$=(0,1,1,0,0)
- Disparando $t_3$.
  - $M_2$=(1,0,0,1,1)


© Mauro Silva

# Matriz de Incidência

- Utilizando a representação matricial, a estrutura da RdP é representada pelo:
  - Conjunto de lugares,
  - Conjunto de transições,
  - Matriz de entrada,
  - Matriz de saída.
- Matriz de Entrada apresenta os lugares de entrada (pré-condições)
- Matriz de Saída apresenta os lugares de saída (pós-condições)


© Mauro Silva

## Matriz de Incidência

- Quanto $t$ dispara, a diferença entre as marcações $M_1$ e $M_0$ é igual à diferença dada por $I(p,t)-O(p,t)$ para todo lugar $p \in P$.
- Denomina-se $\boldsymbol{C = I - O}$ a **matriz de incidência**, dado que fornece a incidência de arcos de entrada e saída e cada transição dos modelos.


© Mauro Silva

## Matriz de Incidência

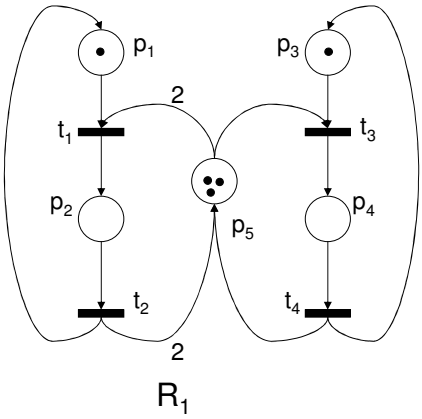
- Definição: seja a rede $R=(P,T,I,O,K)$, onde $P$ é o conjunto de lugares, $T$ é o conjunto de transições, $I$ é a matriz de entrada, $O$ é a matriz de saída e $K$ a capacidade dos lugares. A matriz de incidência C das redes de Petri representa a relação $P \times T \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:
  - $\forall p \in P, \forall t \in T \mid C(p,t) = I(p,t) - O(p,t).$


© Mauro Silva

# Grafo das Marcações Acessíveis

- O Grafo das Marcações Acessíveis é uma representação gráfica do conjunto das marcações que podem ser alcançadas para uma dada rede de Petri.
- O disparo de uma transição modifica a marcação, conforme a marcação atual e a estrutura da rede.
- Essas marcações obtidas após o disparo das transições são marcações cessíveis de uma rede para uma determinada marcação inicial.


© Mauro Silva




- Rede marcada $N_1=(R_1, M_0)$
  - O vetor $M_k$ representa o *k-ésima* marcação da rede $R_1$
    - $M_k=(m(p_1),m(p_2),m(p_3),m(p_4),m(p_5))$
  - $A(R_1;M_0)=\{M_0,M_1,M_2,M_3\}$ é o conjunto de marcações acessíveis obtidas a partir da marcação inicial $M_0$, onde:
    - $M_0=(1,0,1,0,3)$
    - $M_1=(0,1,1,0,1)$
    - $M_2=(0,1,0,1,0)$
    - $M_0=(1,0,0,1,2)$

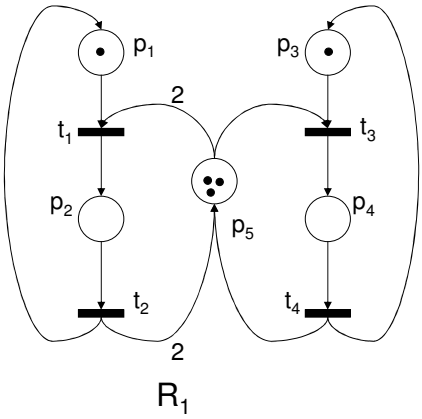

© Mauro Silva

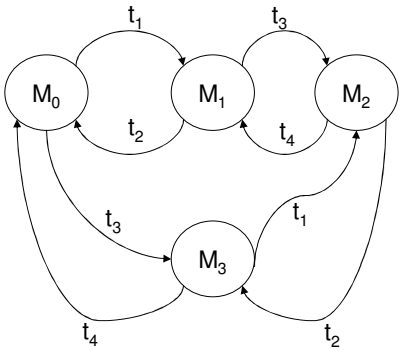
# Grafo das Marcações Acessíveis

- Construção do grafo das marcações acessíveis através da verificação e disparo das transições disparáveis para uma dada marcação inicial e repetindo-se esse processo para as marcações obtidas com esses disparos.
- Os vértices desse grafo são as marcações e os arcos que interconectam esses vértices representam o disparo de cada transição.


© Mauro Silva

# Grafo das Marcações Acessíveis




**Grafo das marcações acessíveis**


© Mauro Silva

## Grafo das Marcações Acessíveis

- Conjunto das Marcações Acessíveis
  - **Definição**: seja uma rede marcada $N=(R;M_0)$; define-se conjunto das marcações acessíveis $A(R;M_0)$ pelo conjunto de marcações obtidas a partir de uma marcação inicial $M_0$ pelo disparo de todas as possíveis seqüências de transições habilitadas, ou seja, $A(R;M_0)=\{M_i \in \mathbb{N}^m\}$, tal que existe uma seqüência de transições *sq* que $M_0[sq > M_i$, onde $m = \#P$ e $M_i$ só é alcançável se, e somente se, $M_i \in A(R;M)$


© Mauro Silva

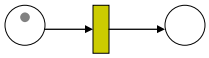
## Grafo das Marcações Acessíveis

- Grafo das Marcações Acessíveis (GA)
  - **Definição**: seja uma rede marcada $N=(R;M_0)$; define-se grafo das marcações acessíveis GA, por um par GA$(R;M_0)=M(M_i, a_{(i,j)})$, onde $M_i \in A(R;M_0)$ são os vértices do grafo e $a_{(i,j)}$ os arcos. Os arcos representam $M'[>M''$ se, se somente se, existe uma transição *t* tal que $M'[t>M''$ (mudança de marcação).

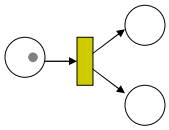

© Mauro Silva

# Redes Básicas

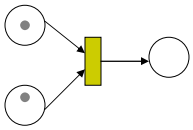
- Sequenciamento



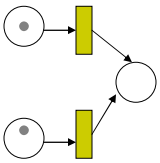
- Distribuição



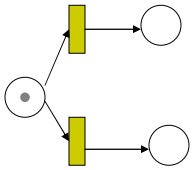
- Junção



*Merging*



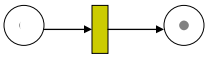
- Escolha



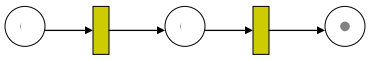

© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- Computação Simples



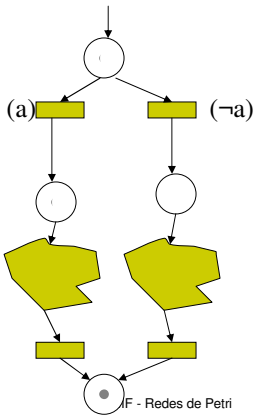
- Seqüenciamento




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

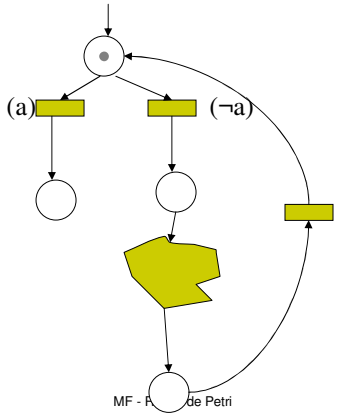
- If-then-else





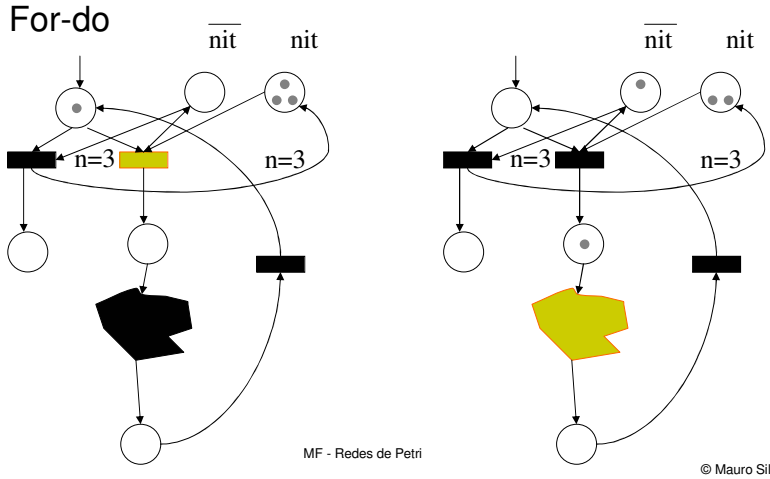

# Fluxo de Controle

- While-do



# Fluxo de Controle

- For-do

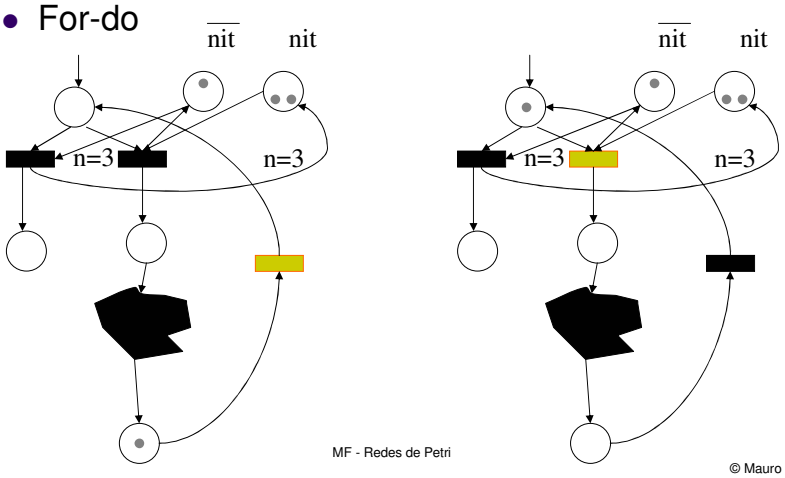




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- For-do

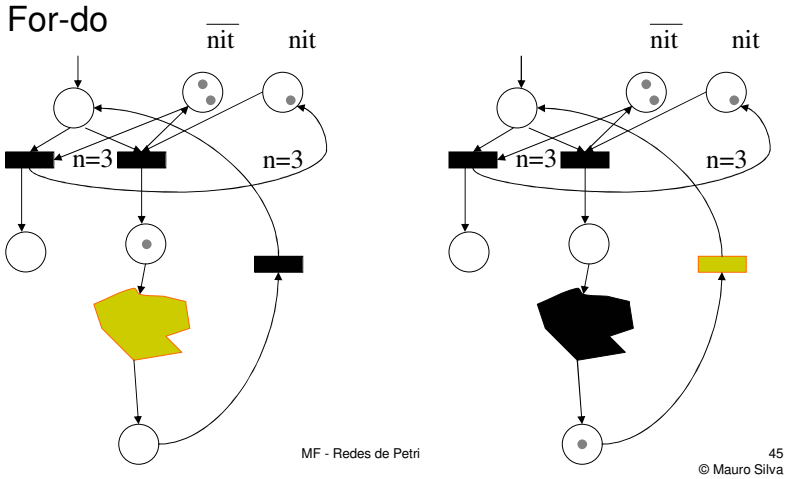




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- For-do

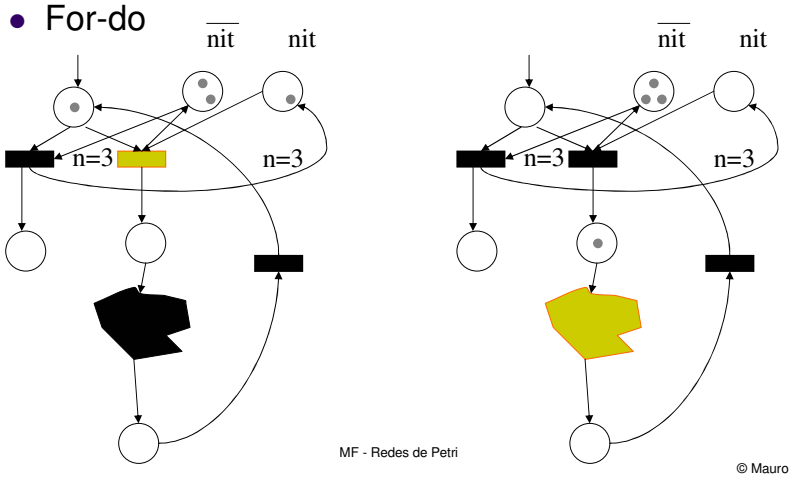




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- For-do

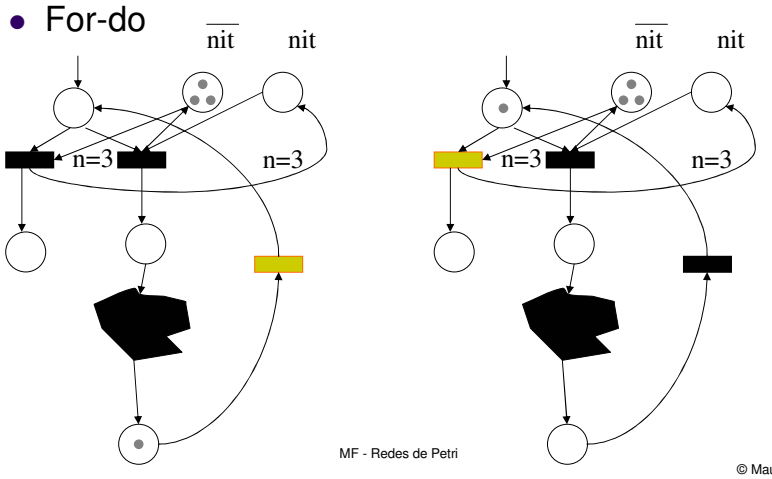




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- For-do

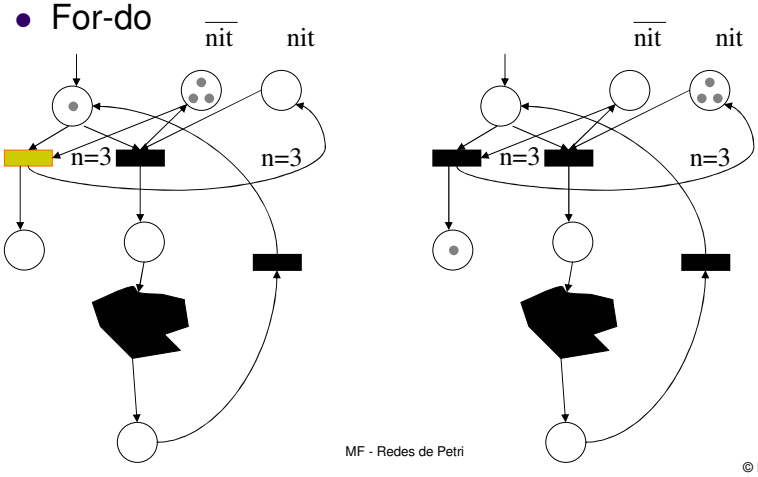




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- For-do

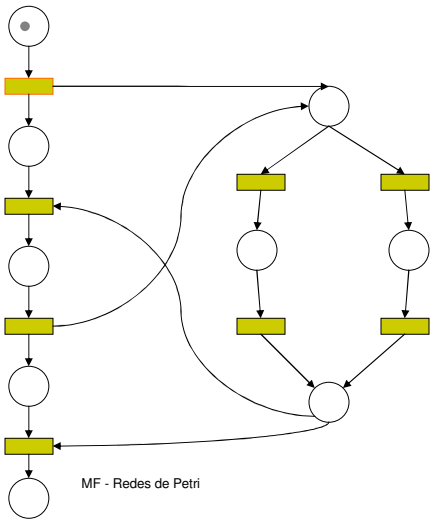




© Mauro Silva

# Fluxo de Controle

- Sub-rotina




© Mauro Silva

# Métodos Formais

Redes de Petri

*por* Mauro Silva